LYCEE SAID BOU BAKKER **MOKNINE** **2019/2020**	**Devoir de contrôle 1** **MATHÉMATIQUES** **Durée : 2 heures**
4^{éme} **Sciences 3**	**Mr. Salah Hannachi**

Le sujet comporte quatre exercices répartis en deux pages

EXERCICE 1 : *(3 points)*

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectifs a = $\sqrt{3}+i$, b = $i\sqrt{3}-1$ et c = a+b.

1) a) Ecrire chacun des complexes a et b sous la forme exponentielle.
   b) A l'aide de l'une des formules d'Euler, montrer que c = $2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.
   c) En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$
2) a) Déterminer les racines cubiques t_1 , t_2 et t_3 du nombre complexe c.
   b) Montrer que : $t_1 + t_2 + t_3 = 0$

EXERCICE 2 : *(5 points)*

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. on considère On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et par A et B les points d'affixes respectives 1 et $t=\sqrt{3}+i$.

1) a) Donner la forme exponentielle de t.
   b) Construire le point B.

2) Soit le point E du plan d'affixe $e=\frac{1-t}{\overline{t}-1}$
   a) Vérifier que $e.\overline{e}=1$. En déduire que le point E appartient au cercle $\mathcal{C}$.
   b) Montrer que $\frac{e-1}{t-1}$ est un réel. En déduire que les points A, B et E sont alignés.
   c) Construire alors le point E.

3) A tout point M distinct de A d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z'=\frac{1-z}{\overline{z}-1}$
   Soit N le point du plan d'affixe $\overline{z}$.
   a) Vérifier que $|z'|=1$. En déduire que le point A appartient à la médiatrice de $[MN]$.
   b) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \pi + 2\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}}\right)[2\pi]$
   c) En déduire l'ensemble des points M du plan pour que le point M' soit le symétrique de A par rapport à O.

EXERCICE 3 : (7 points)

I/ Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 3x - 2 + 2sinx$

1) a) Montrer que pour tout $x \in IR$, on a : $3x - 4 \leq f(x) \leq 3x$

   b) En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

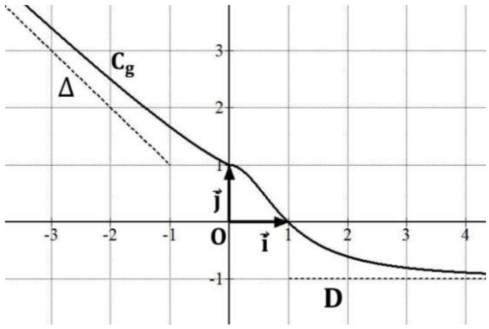
2) a) Montrer que f est continue et strictement croissante sur IR.

   b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans IR.
   Vérifier que $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$

   c) En déduire le tableau de signe de $f(x)$ pour tout $x \in IR$.

   d) Montrer que $cos\alpha = \sqrt{3\alpha - \frac{9}{4}\alpha^2}$

II/ Dans le graphique ci-contre, C_g est la courbe d'une fonction g définie et continue sur IR telle que :
La droite $\Delta : y = -x$ est une asymptote oblique au V($-\infty$).
La droite $D\ : y = -1$ est une asymptote au V($+\infty$).



1) a) Déterminer chacune des limites suivantes :

   $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) + x$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g\ o\ g(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} g\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} x.g\left(\frac{1}{x}\right)$

   b) Déterminer l'image par g de chacun des intervalles suivants :
   $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 1[$

2) Soit la fonction h définie par : $h(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}}$

   a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.

   b) Montrer que la fonction $f\ o\ h$ est continue sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.

   c) On admet que l'équation $f\ o\ h(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]-\infty, 1[$.
   Montrer que $g(\beta) = \frac{1}{\alpha^2}$

EXERCICE 4 : (5 points)

Soit la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{u_n}$ pour tout $n \in IN$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $u_n \geq 3$

   b) Factoriser $-x^2 + 4x - 3$ pour tout réel x. Montrer alors que (u_n) est décroissante.

   c) En déduire que (u_n) est convergente. Donner un encadrement de sa limite ℓ.

2) a) Montrer que $\forall\, n \in IN$, $u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}(u_n - 3)$.

   b) En déduire que $\forall\, n \in IN$, $u_n - 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) On pose pour tout $n \in IN$, la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$

   a) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $3n + 3 \leq S_n \leq 3n + 3 + \frac{1}{2}\left[3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$

   b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$